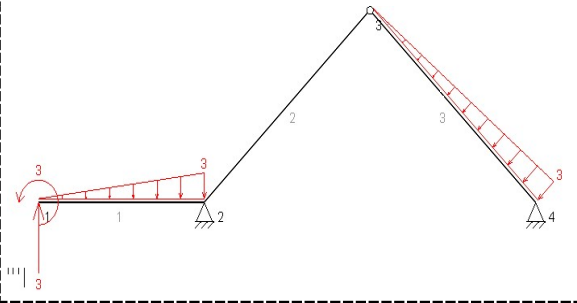


Determinar las leyes de esfuerzo de la siguiente estructura, y representar sus correspondientes diagramas de esfuerzos axiles, cortantes y momentos flectores.

Datos:

$$L_{12} = 3 \text{ m}; L_{23} = L_{34} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

Fuerzas y momentos en kN y kN.m.



a) Estabilidad

Por buscar una alternativa al método de cálculo que solemos emplear, apliquemos el siguiente enfoque.

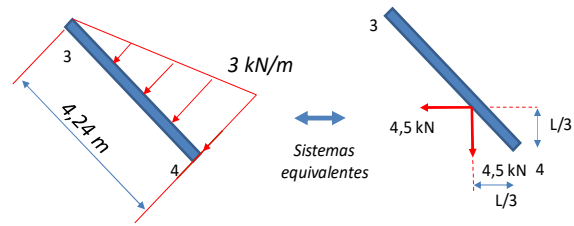
Tenemos dos soportes fijos, cada uno de ellos con dos ligaduras, es decir 4 incógnitas. Disponemos de 3 ecuaciones de equilibrio más una de la rótula. No vemos por otra parte ninguna singularidad en la estructura que pudiera causar una aceleración del sistema.

De lo anterior se infiere que la estructura es isostática y sus 4 reacciones pueden ser calculadas utilizando las ecuaciones del equilibrio estático.

b) Reacciones

Para facilitar su cálculo, vamos a descomponer el triángulo del tramo 3-4 en 2 componentes, vertical y horizontal a 45°:

$$F_x = F_y = \frac{qL\sqrt{2}}{2} = \frac{3.3\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 4,5 \text{ kN}$$



Con este resultado procedemos a utilizar las ecuaciones del equilibrio.

$$\sum M_4 = 0$$

$$3.9 - 3 + 6V_2 - \frac{3}{2}3.7 - 4,5.1 - 4,5.1 = 0$$

$$V_2 = 2,75 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_4 = 3,25 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0 \text{ (derecha)}$$

$$3H_4 + 3V_4 - 4,5.2 - 4,5.2 = 0$$

$$H_4 = 2,75 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_2 = 1,25 \text{ kN}$$

c) Leyes de esfuerzo

Tramo 1-2

$$N_{12} = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 3 - V_T(x) \text{ (T = carga triangular)}$$

$$q(x) = q_0 \frac{x}{L} = x \left(\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

$$V_T(x) = \int_0^x z \, dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

$$V(x) = 3 - \frac{x^2}{2} \text{ kN}$$

$$M(x) = -3 + 3x - M_T(x)$$

$$M_T(x) = \int_0^x \frac{z^2}{2} dz = \frac{x^3}{6}$$

$$M(x) = -3 + 3x - \frac{x^3}{6} \text{ kN.m}$$

$$M_{\max} \rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x) = 0 \rightarrow x = 2,44 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 1,9 \text{ kN.m}$$

Tramo 2-3

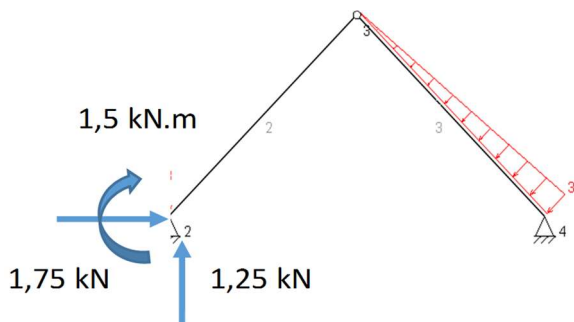
Debido a la geometría inclinada de la viga, de nuevo va a resultar más útil trabajar con sistemas equivalentes.

$$\sum F_x = H_B = 1,75 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 3 - 3.3 + \frac{3.3}{2} = 1,5 \text{ kN.m}$$

$$\sum F_y = 3 - 4,5 + 2,75 = 1,25 \text{ kN}$$

Por ello, podemos considerar a efectos del análisis del tramo 2-3 el sistema de fuerzas anterior, empezando la coordenada "x" directamente en el punto 2, así se simplifican los cálculos puesto que no es necesario arrastrar términos del tipo (x-a) en el momento.



Como no hay fuerzas en el tramo 2-3, podemos proyectar directamente sobre los ejes coordenados el sistema equivalente:

$$N_{23} = (1,25 - 1,75) \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ kN}$$

$$V_{23} = (1,25 + 1,75) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ kN}$$

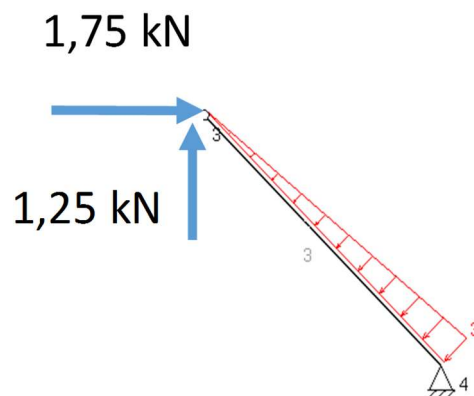
El momento se puede obtener mediante las coordenadas horizontales y verticales x e y, que son iguales debido a los 45° de pendiente.

$$M(x) = 1,5 + 1,25x - 1,75y = 2,5 - 0,5x \text{ kN.m}$$

Tramo 3-4

De manera análoga al tramo analizado previamente, vamos a determinar el sistema de fuerzas equivalentes del sistema formado por los tramos 1-2 y 2-3. La nueva coordenada "x" comenzará desde el punto 3 y es coincidente con la directriz de la viga.

Este paso al igual que antes, no es imprescindible, pero nótese cuanto se simplifican los cálculos al tener que evitar todas las proyecciones, así como la integración del triángulo que se encuentra en el tramo 3-4.



$$\sum F_y = 3 - \frac{3.3}{2} + V_2 = 1,25 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = H_2 = 1,75 \text{ kN}$$

De esta forma, eliminaremos del cálculo todo lo que exista detrás del punto 3, puesto que el efecto de dichas cargas vendrá representado por el nuevo sistema equivalente que es el formado por las fuerzas horizontales y verticales ya que el momento debe ser cero en la rótula.

$$N_{34} = (1,25 - 1,75) \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ kN}$$

$$V_{34} = (1,25 + 1,75) \frac{\sqrt{2}}{2} - V_T(x)$$

$$q(x) = q_0 \frac{x}{L} = \frac{3x}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x}{2} \left(\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right)$$

$$V_T(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{2}z}{2} dz = \left[\frac{\sqrt{2}z^2}{4} \right]_0^x = \frac{\sqrt{2}x^2}{4}$$

$$V(x) = (1,25 + 1,75) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}x^2}{4}$$

$$V(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}x^2}{4} \text{ kN}$$

$$M(x) = \frac{3\sqrt{2} \cdot x}{2} - M_T(x)$$

$$M_T(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{2}z^2}{4} dz = \left[\frac{\sqrt{2}z^3}{12} \right]_0^x = \frac{\sqrt{2}x^3}{12}$$

$$M(x) = \frac{3\sqrt{2} \cdot x}{2} - \frac{\sqrt{2}x^3}{12} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\max} \rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x) = 0 \rightarrow x = 2,44 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 3,46 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ahora con todos los resultados podemos representar las funciones, dando valores a los puntos iniciales y finales de cada una de ellas, comprobando aquellos resultados que se conozcan (por ejemplo, momento nulo en la rótula).

d) Diagramas de esfuerzos

